

УДК 519.213
Научная специальность: 1.2.2

ISSN 1812-5220
© Проблемы анализа риска, 2024

Калибровка распределения S_U -Джонсона будущей цены базового актива на основе цен опционов

Арбузов П.А.*,
Голембиовский Д.Ю.,
Московский государственный
университет
имени М.В. Ломоносова,
119991, Россия, г. Москва,
Ленинские горы, д. 1

Аннотация

Исследование посвящено прогнозированию базового актива опционов на основе их рыночных котировок. Рыночные цены опционов отражают ожидания участников торгов о будущей динамике базового актива. В статье рассмотрено, как от реальных цен опционов перейти к вероятностному распределению будущей цены базового актива, а также приведены статистические исследования точности полученных распределений.

Ключевые слова: опционы; прогнозирование; риск-нейтральность; чувствительность к риску; вероятностные распределения.

Для цитирования: Арбузов П.А., Голембиовский Д.Ю. Калибровка распределения S_U -Джонсона будущей цены базового актива на основе цен опционов // Проблемы анализа риска. 2024. Т. 21. № 2. С. 78–93.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Calibration of Johnson- S_U Distribution of Future Price of Underlying Asset Based on Option Prices

Peter A. Arbuzov*,
Dmitry Yu. Golembiovsky,
Lomonosov Moscow State
University,
Leninskie Gory, 1, Moscow,
119991, Russia

Abstract

The study focuses on forecasting the underlying asset of options based on their market quotes. Market prices of options reflect the expectations of traders about future dynamics of the underlying asset. The paper considers how to transition from real option prices to a probability distribution of the future price of the underlying asset and provides statistical studies of the accuracy of the obtained distributions.

Keywords: options; forecasting; risk neutrality; risk sensitivity; probabilistic distributions.

For citation: Arbuzov P.A., Golembiovsky D.Yu. Calibration of Johnson- S_U distribution of future price of underlying asset based on option prices // Issues of Risk Analysis. 2024;21(2):78-93. (In Russ.)

The authors declare no conflict of interest.

Содержание

Введение

1. Ценообразование опционов
2. Подразумеваемая волатильность
3. Подразумеваемое распределение стоимости базового актива
4. Построение подразумеваемого распределения на реальных данных
5. Переход от риск-нейтрального распределения к физическому распределению
6. Статистические исследования точности метода

Заключение

Список источников

Введение

В статье рассматривается возможность прогнозирования цены базового актива опционов на основе информации, содержащейся в их рыночных котировках. Рыночные цены опционов зачастую отличаются от цен, предполагаемых теоретическими моделями. Это означает, что у участников рынка есть свое представление о будущем распределении стоимости базового актива.

Рыночные цены опционов определяют подразумеваемую волатильность базового актива, которая может отличаться от исторической волатильности. Значения подразумеваемой волатильности опционов различных страйков формируют так называемую улыбку волатильности [1].

В статье показано, как от кривой подразумеваемой волатильности перейти к подразумеваемому риск-нейтральному распределению будущей цены базового актива. Затем на основе риск-нейтрального распределения и предположения о том, что агент имеет степенную функцию полезности, строится физическое распределение будущей стоимости базового актива [17, 18]. Задача построения риск-нейтральной плотности распределения будущей стоимости базового актива исследуется во множестве научных работ. Методы решения этой задачи могут быть разделены на две основные категории: параметрические и непараметрические [7].

Параметрические методы основаны на предположении о том, что риск-нейтральная плотность распределения стоимости актива в момент экспирации опциона принадлежит некоторому известному распределению или семейству распределений. Одним из известных предположений является то, что будущая стоимость актива распределена логнормально [1]. Именно такое распределение подразумевает модель Блэка-Шоулза, однако исследования показывают, что на некоторых рынках смеси двух или трех логнормальных распределений могут давать более точную оценку распределения [4, 8–10]. Параметры распределений подбираются таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов разностей между рассчитываемыми и рыночными ценами опционов.

В свою очередь, модели, основанные на непараметрических методах, могут выдавать более гибкий результат оценки распределения будущей стоимости актива, с более высокой точностью соответствия наблюдаемым ценам опционов. На форму плотности вероятностного распределения не накладываются

ограничения ввиду отсутствия предположений о его виде или принадлежности какому-либо семейству. Непараметрические методы решения поставленной задачи могут существенно отличаться друг от друга. Так, например, некоторые модели восстанавливают распределение будущей цены по подразумеваемым биномиальным деревьям [12], а другие основаны на методах максимальной энтропии [13] или ядерных методах [14]. Также одним из популярных непараметрических методов является метод сглаживания улыбки подразумеваемой волатильности [3, 4, 11, 15]. На основе сглаженной улыбки подразумеваемой волатильности восстанавливаются цены опционов для тех значений страйков, по которым не ведутся торги. Затем по полученным ценам опционам строится подразумеваемая риск-нейтральная плотность будущей стоимости базового актива. Исследования показывают, что сглаживание улыбки волатильности дает более точное соответствие рыночным ценам опционов в сравнении со сглаживанием кривой стоимости опционов в зависимости от страйка [3, 4].

Отличие этой работы от предыдущих исследований заключается в том, что в ней представлен метод, основанный на комбинации параметрического и непараметрического подходов. Предполагается, что риск-нейтральная и физическая логарифмические доходности базового актива распределены по закону S_U -Джонсона, чьи параметры калибруются соответственно подразумеваемому риск-нейтральному распределению и подразумеваемым физическим распределениям будущей цены базового актива, построенным на основе сглаженной улыбки волатильности [2, 3]. Распределение S_U -Джонсона — модификация нормального распределения, задаваемая четырьмя параметрами и имеющая тяжелые хвосты. Использование данного распределения позволяет дать достаточно точную оценку вероятностей экстремальных значений доходности базового актива и описать широкий спектр форм плотности вероятности.

В работе используется сглаживание кривой волатильности с помощью полинома пятой степени. Далее показано, как перейти от риск-нейтрального распределения будущей стоимости базового актива к физическому в предположении, что агент имеет степенную функцию полезности для различных значений коэффициента чувствительности к риску. На основе полученных подразумеваемых риск-нейтрального

и физического распределений будущей цены базового актива подбираются наборы параметров распределений S_J -Джонсона.

Представлено статистическое исследование точности полученных распределений будущей цены базового актива по историческим данным. Рассматриваются значения индекса акций NIFTY 50 и колл опционов на этот индекс за период с марта 2018 г. по март 2023 г. Проводится тест Црнковича-Драхмана для проверки точности построенных распределений [5, 16] для различных значений параметра чувствительности к риску.

1. Ценообразование опционов

В статье анализируются европейские опционы, которые могут быть исполнены только в момент экспирации. Одной из наиболее популярных моделей ценообразования европейских опционов является модель Блэка-Шоулза [1]. Например, с помощью этой модели определяются теоретические цены опционов на акции и индексы акций для доски опционов на Московской бирже [6].

Модель Блэка-Шоулза предполагает, что динамика базового актива следует закону геометрического броуновского движения:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

где:

S — это цена базового актива;

μ — коэффициент сноса;

σ — волатильность базового актива;

dz — нормальный белый шум. При таком законе динамики логарифмическая доходность базового актива будет иметь нормальное распределение.

В соответствии с моделью Блэка-Шоулза цены европейских опционов колл и пут определяются формулами:

$$\begin{aligned} c_e &= S\Phi(d_1) - Ke^{-rt}\Phi(d_2); \\ p_e &= Ke^{-rt}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1); \\ d_1 &= \frac{\ln(S/K) + rt}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}; \\ d_2 &= \frac{\ln(S/K) + rt}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}, \end{aligned}$$

где:

c_e и p_e — цены европейских опционов колл и пут;

S — цена спот базового актива;

K — страйк опциона;

t — время до экспирации опциона;

σ — волатильность базового актива;

r — непрерывная безрисковая процентная ставка;

Φ — функция стандартного нормального закона распределения.

2. Подразумеваемая волатильность

Однако рыночные цены опционов нередко отличаются от цен, предполагаемых теоретическими моделями. Это говорит о том, что у участников рынка есть свое представление о распределении будущей стоимости базового актива. На рисунке 1 представлено сравнение рыночных и теоретических цен, рассчитанных по модели Блэка-Шоулза опционов сроком экспирации один месяц на индекс акций NIFTY 50 за 4 мая 2018 г. [19] при текущей цене индекса, равной 10618 пунктам.

Из рисунка 1 видно, что рыночные цены опционов могут быть как выше, так и ниже цен опционов, определяемых теоретической моделью. В работе при расчете теоретических цен опционов использовалась модель Блэка-Шоулза с историческим значением волатильности базового актива за предшествующий год.

В свою очередь рыночные цены опционов определяют так называемую подразумеваемую волатильность. Подразумеваемая волатильность — это такое значение волатильности, при подстановке которого в формулу расчета стоимости опциона будет получена его текущая рыночная стоимость. Значения подразумеваемой волатильности могут отличаться от значений исторической волатильности и даже могут различаться для одних и тех же опционов в зависимости от страйка. Значения подразумеваемой волатильности в зависимости от страйка формируют кривую, которую называют улыбкой волатильности из-за ее формы, напоминающей улыбку. На рисунке 2 представлена улыбка волатильности опционов, цены которых даны на рис. 1.

3. Подразумеваемое распределение стоимости базового актива

Еще в конце 80-х годов прошлого века был представлен метод построения риск-нейтрального вероятностного распределения будущей стоимости базового актива на основе цен колл опционов [2]. Приведем метод построения плотности этого вероятностного распределения на основе цен опционов колл или цен опционов пут.

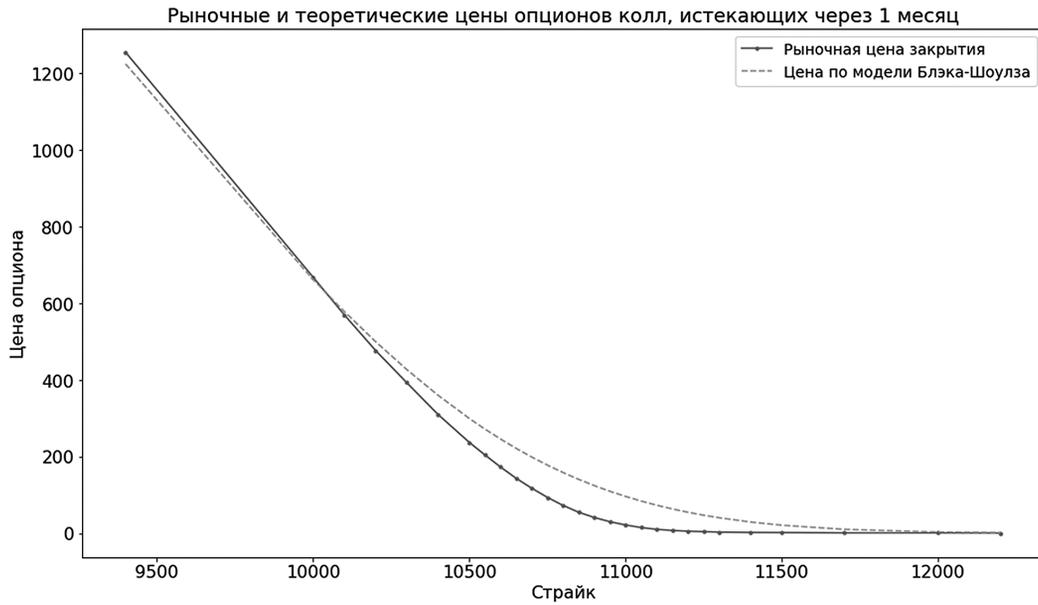


Рис. 1. Сравнение рыночных и теоретических цен опционов

Figure 1. Comparison of market and theoretical option prices



Рис. 2. Улыбка волатильности

Figure 2. Volatility smile

Цены европейских опционов колл и пут со страйком K и сроком действия T определяются дисконтированным ожидаемым значением выплаты по опциону и равны:

$$c_e = e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K) g(S_T) dS_T;$$

$$p_e = e^{-rT} \int_{S_T=0}^K (K - S_T) g(S_T) dS_T,$$

где:

S_T — значение стоимости базового актива в момент экспирации опциона,

g — риск-нейтральная плотность вероятности распределения стоимости базового актива в момент экспирации опциона.

Дифференцируя эти выражения по переменной страйка K , получаем:

$$\frac{\partial c_e}{\partial K} = -e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} g(S_T) dS_T;$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial K} = e^{-rT} \int_{S_T=0}^K g(S_T) dS_T.$$

Повторно дифференцируя выражения по страйку K , приходим к выводу, что:

$$\frac{\partial^2 c_e}{\partial K^2} = e^{-rT} g(K);$$

$$\frac{\partial^2 p_e}{\partial K^2} = e^{-rT} g(K).$$

Отсюда следует, что плотность вероятности g можно вычислить так:

$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c_e}{\partial K^2};$$

$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 p_e}{\partial K^2}.$$

Тогда для определения риск-нейтральных распределений вероятностей можно воспользоваться разностной схемой для аппроксимации второй производной. Пусть c_1 , c_2 и c_3 — цены европейских опционов колл со сроком экспирации T и страйками $K - \delta$, K и $K + \delta$, соответственно. Предполагая, что величина δ мала, получаем следующую оценку плотности вероятности g :

$$g(K) = e^{rT} \frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2}. \quad (1)$$

Формула (1) дает вероятность того, что в момент экспирации опциона стоимость базового актива будет равна K . Аналогично можно определить вероятность стоимости базового актива в момент экспирации опционов на основе цен опционов пут.

4. Построение подразумеваемого распределения на реальных данных

Представленный выше метод не даст корректного результата на рыночных котировках опционов без дополнительных преобразований ввиду дискретности страйков торгуемых опционов. Например, на индекс акций NIFTY 50 к торгам доступны опционы с шагом страйка 50 пунктов для опционов у денег, с шагом 100 и более пунктов для опционов глубоко вне денег или глубоко в деньгах, когда сам индекс исторически торгуется в диапазоне приблизительно от 8000 до 19000 пунктов. Такое расстояние между точками на кривой цен опционов недостаточно мало для построения точной аппроксимации второй производной цены.

Сглаживание и интерполяция кривой стоимостей опционов могут решить данную проблему. Исследования показали, что более точный результат дает сглаживание улыбки волатильности с последующим определением цен опционов на основе полученных значений волатильности [3, 4].

В работе представлены результаты исследования, проводившегося на данных об опционах на индекс NIFTY 50 за период с марта 2018 г. по март 2023 г. На рисунке 3 показана история цен индекса в указанный период времени.

Для построения улыбок волатильности и подразумеваемых распределений цены актива использовались цены закрытия торгов по опционам колл, по которым в рассматриваемый день проводились сделки. В связи с тем, что ликвидность опционов некоторых страйков может быть мала в течение дня, а значение индекса может изменяться внутри дня, цены закрытия создают неточности в данных, что может привести к ошибкам при построении подразумеваемого распределения.

Алгоритм построения подразумеваемых распределений будущих цен базового актива состоит из следующих шагов:

1. Построение улыбок волатильности.
2. Сглаживание улыбок волатильности.
3. Построение подразумеваемых распределений.



Рис. 3. История цен индекса NIFTY 50

Figure 3. NIFTY 50 index price history

4. Отбор подходящих распределений.
5. Переход к физическим распределениям.
6. Аппроксимация построенных плотностей вероятности известным распределением.

На первом шаге алгоритма необходимо построить улыбку волатильности на основе цен опционов, торгуемых в рассматриваемый день. Для этого для каждого опциона необходимо вычислить значение подразумеваемой волатильности. В связи с отсутствием аналитической формулы подразумеваемой волатильности в модели Блэка-Шоулза доступным способом ее вычисления являются численные методы. Заметим, что цены опционов колл и пут монотонно возрастают относительно волатильности. Для вычисления подразумеваемой волатильности можно воспользоваться, например, методом градиентного спуска.

На втором шаге алгоритма необходимо сгладить улыбку волатильности для получения возможности применения формулы (1) для построения плотности подразумеваемого распределения. В качестве способа сглаживания был выбран метод сглаживания полиномом пятой степени. При построении подразумеваемых распределений для цепочек опционов с различными датами экспирации этот метод дал большое количество подходящих распределений, об отборе которых рассказывается на четвертом шаге алгоритма. На рисунке 4

представлен пример сравнения метода сглаживания полиномом пятой степени с методом интерполяции кубическими сплайнами, который использовался в некоторых исследованиях [3, 4].

На третьем шаге алгоритма производится расчет цен опционов на основе сглаженной улыбки волатильности по формуле Блэка-Шоулза. Полученные цены опционов используются для построения плотности вероятности распределения будущей цены базового актива по формуле (1).

На четвертом шаге алгоритма производился отбор подходящих распределений: площадь под построенной кривой плотности вероятностного распределения должна быть равна 1.

В качестве порогового значения для определения подходящих распределений было выбрано значение 0.99. Все распределения, площадь под графиком которых была выше порогового значения, были задействованы для дальнейших расчетов, остальные были отброшены.

Зашумленность данных может привести к тому, что в результате расчета по формуле (1) значение плотности вероятности в конкретных точках может принимать отрицательные значения. В этом случае значение плотности вероятности в этих точках предвзято принималось равным нулю.

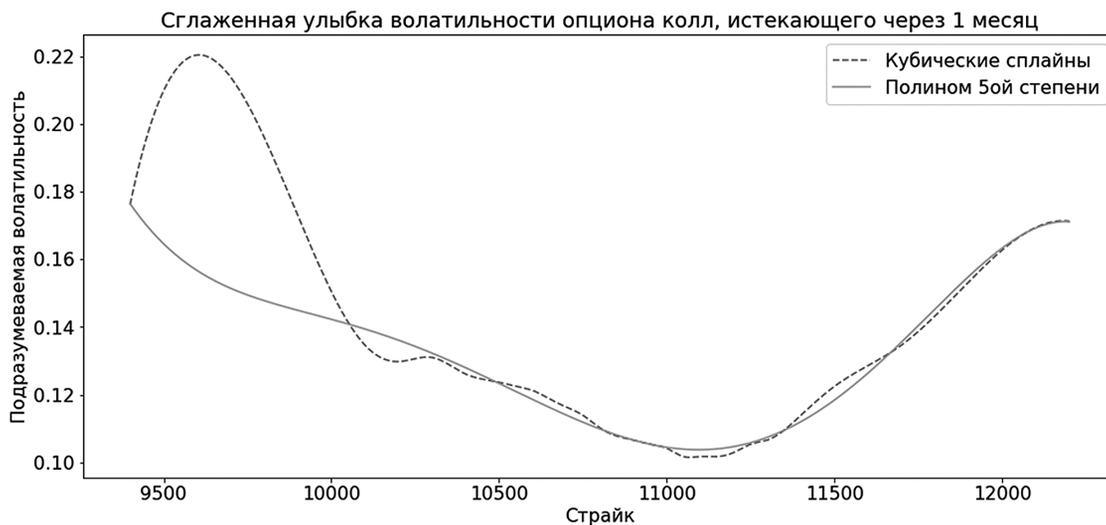


Рис. 4. Сглаженная улыбка волатильности

Figure 4. Smoothed volatility smile

На пятом шаге алгоритма производился переход от риск-нейтральной плотности вероятности к физическим плотностям вероятности для различных значений степени чувствительности к риску. Подробнее о процессе перехода к физическим распределениям будет рассказано в следующем разделе работы.

В связи с тем, что в результате расчета были получены кривые, площадь под графиками которых в общем случае не равняется единице, диапазон возможных будущих стоимостей базового актива ограничен диапазоном страйков опционов.

На шестом шаге алгоритма было решено аппроксимировать полученные плотности вероятности известным распределением. Для аппроксимации было выбрано распределение S_U -Джонсона. Распределение S_U -Джонсона — это модификация нормального распределения, имеющая тяжелые хвосты.

$$Y \sim JSU(\xi, \lambda, \gamma, \delta);$$

$$Y = \xi + \lambda \sinh\left(\frac{X - \gamma}{\delta}\right),$$

где $X \sim N(0,1)$.

Такое распределение может подойти для описания доходности активов на финансовых рынках, что

подтверждается проведенными статистическими исследованиями, о которых будет рассказано далее. На рисунке 5 представлены подразумеваемая и аппроксимированная плотности вероятности логарифмированной доходности базового актива — логарифма отношения стоимости базового актива в момент экспирации опциона к его стоимости в день торгов, построенные на данных об опционах сроком экспирации один месяц. Оценка параметров распределения S_U -Джонсона производилась методом максимального правдоподобия: для всех возможных значений страйков опционов, взятых с шагом 0,2 пункта, в выборку добавлялись наблюдения соответствующей доходности в количестве, равном значению плотности, умноженном на 100. В результате такого подхода для каждого подразумеваемого распределения будущей стоимости базового актива была сгенерирована выборка доходностей, частотное распределение которой соответствует рассматриваемому подразумеваемому распределению.

Таким образом, в результате работы алгоритма для каждого набора опционов одного срока для каждого торгового дня будут получены параметры распределения S_U -Джонсона, описывающего распределение стоимости базового актива в момент экспирации опциона, для различных значений чувствительности агента к риску.

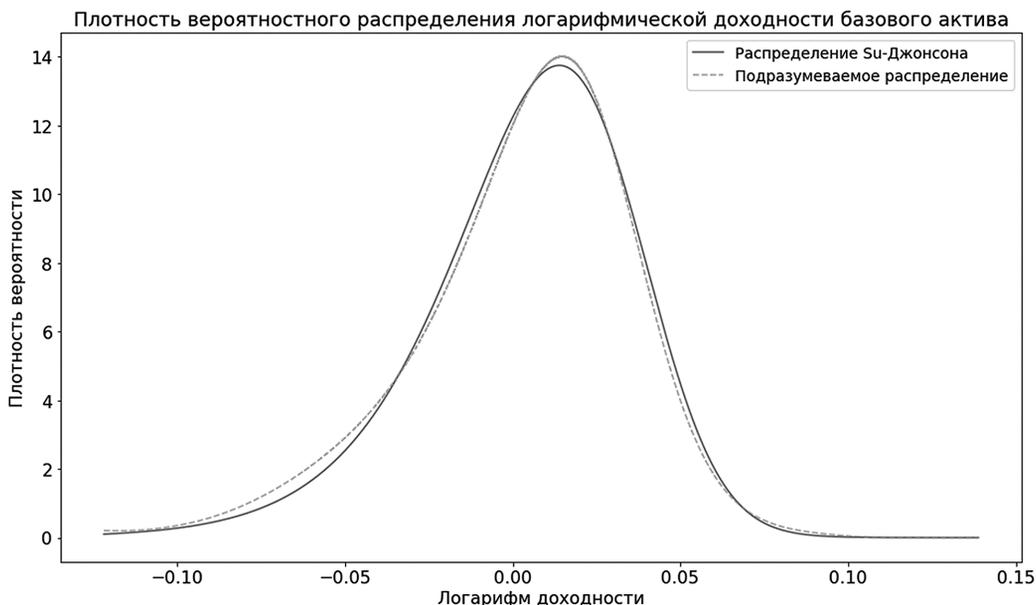


Рис. 5. Плотность вероятности логарифмической доходности базового актива

Figure 5. Probability density of logarithmic yield of the underlying asset

5. Переход от риск-нейтрального распределения к физическому распределению

До этого момента оценка стоимости опционов и построение распределений будущей стоимости базового актива производились нами в риск-нейтральной вероятностной мере, соответствующей ожиданиям инвесторов, нейтральных к риску. Однако риск-нейтральное распределение будущей цены актива далеко не всегда может давать хорошее представление о его будущей динамике, так как участники торгов зачастую не нейтральны к риску. В этом случае необходимо произвести переход к физической вероятностной мере, которая будет отражать настроение инвесторов, связанное с их чувствительностью к риску и неопределенностью будущих цен [16].

Для того чтобы отразить чувствительность агента к риску, необходимо ввести его функцию полезности. Одной из часто используемых функций полезности является степенная функция [17], имеющая вид:

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \gamma \geq 0, \gamma \neq 1 \\ u(x) = \ln(x), \gamma = 1 \end{cases}$$

Здесь x в нашем случае — это стоимость базового актива в момент экспирации опциона, а параметр γ отражает чувствительность агента к риску. Чем выше значение параметра, тем более чувствителен агент к риску. При значении параметра, равном нулю, агент является нейтральным к риску. Так же эта функция полезности обладает свойством постоянности относительной чувствительности к риску (Relative Risk Aversion — RRA [18]), которая равняется значению параметра γ :

$$RRA(x) = -x \cdot \frac{u''(x)}{u'(x)} = \gamma.$$

Постоянность относительной чувствительности к риску часто можно интерпретировать так, что процесс принятия решений не зависит от объема средств. Например, это означает, что доля благосостояния, вкладываемая в рисковый актив, не будет зависеть от его стоимости.

Для перехода к физической плотности вероятности необходимо ввести стохастический показатель дисконтирования $M(S_T)$, который отражает чувствительность инвесторов к риску. В этом случае стоимость европейского опциона колл определяется как ожидаемая в физической вероятностной мере выплата

по опциону с учетом стохастического показателя дисконтирования [16, 17]:

$$c_e = E^P [M(S_T) \max(S_T - K, 0)] = \int_K^\infty M(x)(x - K) \tilde{g}(x) dx,$$

где $\tilde{g}(x)$ — соответствующая физическая плотность вероятности будущей стоимости базового актива, а P — физическая вероятностная мера.

Тогда с учетом определения цены опциона в риск-нейтральной мере, представленной ранее, получаем:

$$M(x) = e^{-rT} \frac{g(x)}{\tilde{g}(x)},$$

где $g(x)$ — риск-нейтральная плотность вероятности будущей стоимости базового актива.

Также было показано, что стохастический показатель дисконтирования должен быть пропорционален предельной полезности агента [21]:

$$M(x) = \lambda \frac{du}{dx}.$$

Тогда с учетом необходимости нормировать плотность вероятности таким образом, чтобы ее интеграл

был равен 1, можно установить связь между физической и риск-нейтральной плотностями вероятности следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \frac{e^{-rT} g(x) / M(x)}{\int e^{-rT} g(y) / M(y) dy} = \frac{g(x) / \lambda u'(x)}{\int g(y) / \lambda u'(y) dy} = \\ &= \frac{g(x) / u'(x)}{\int g(y) / u'(y) dy}. \end{aligned}$$

Откуда, с учетом того, что для степенной функции полезности и показателя чувствительности к риску γ , $u'(x) = x^{-\gamma}$, получаем:

$$\tilde{g}(x) = \frac{x^\gamma g(x)}{\int_0^\infty y^\gamma g(y) dy}.$$

Переход от аппроксимированных риск-нейтральных плотностей вероятностей к физическим производился численно для всех возможных промежуточных значений будущей стоимости базового актива с шагом 0,2 пункта. Аппроксимация значения интеграла — знаменателя формулы перехода производилась методом трапеций.

На рисунках 6 и 7 представлены примеры результатов перехода от риск-нейтральной

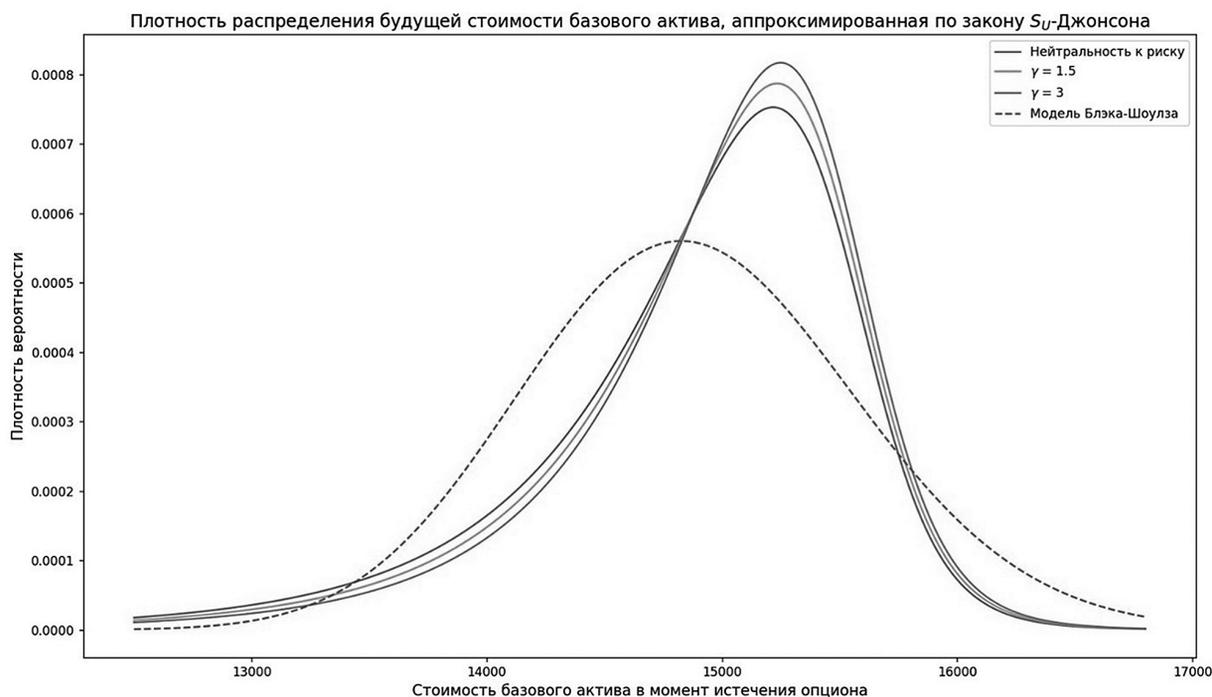


Рис 6. Риск-нейтральная и физическая плотности вероятности будущей стоимости базового актива, рассчитанные по данным об опционах, истекающих через три недели

Figure 6. Risk-neutral and physical probability densities of the future value of the underlying asset calculated from options expiring after in three weeks

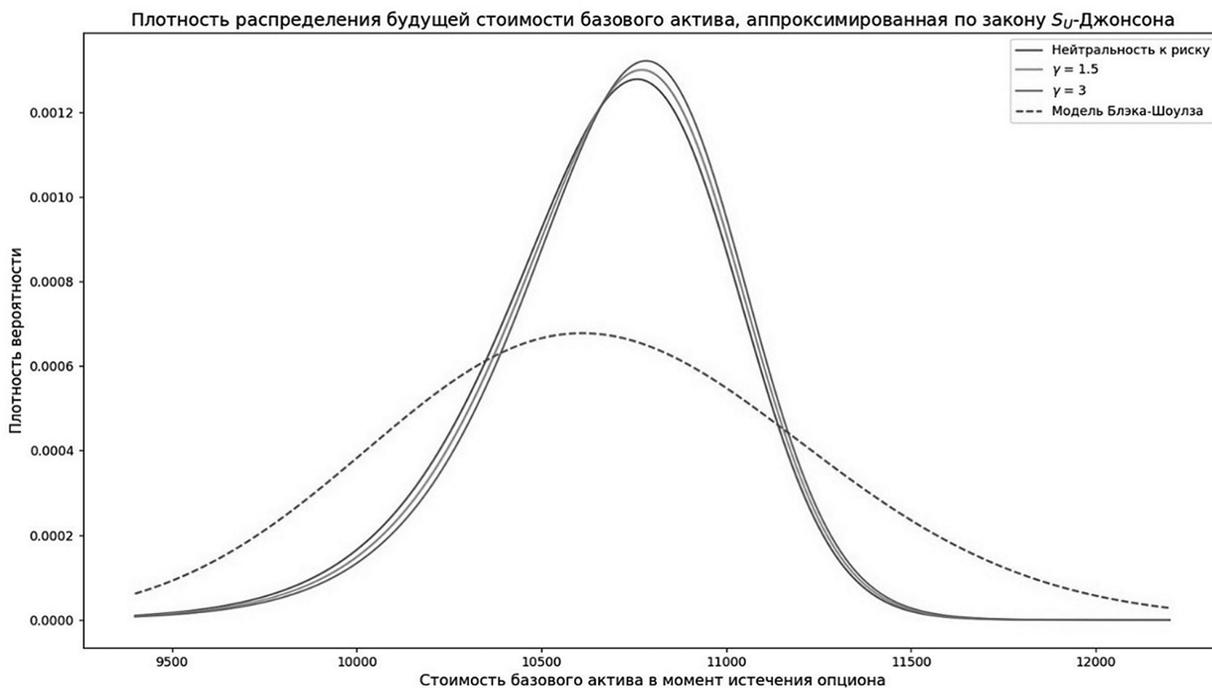


Рис. 7. Риск-нейтральная и физическая плотности вероятности будущей стоимости базового актива, рассчитанные по данным об опционах, истекающих через один месяц

Figure 7. Risk-neutral and physical probability densities of the future value of the underlying asset calculated from options expiring in one month

плотности к физической для значений параметра γ , равных 1,5 и 3, построенных на данных об опционах за 9 апреля 2021 г., истекающих через три недели, и данных об опционах за 4 мая 2018 г., истекающих через один месяц, в сравнении

с плотностью вероятности, предполагаемой моделью Блэка-Шоулза.

В таблицах 1 и 2 приведены значения параметров распределений S_V -Джонсона, изображенных на рисунках 6 и 7, соответственно.

Таблица 1. Параметры распределений S_V -Джонсона, представленных на рис. 6

Table 1. Parameters of Johnson- S_V distributions shown in figure 6

Чувствительность к риску	Значение параметра ξ	Значение параметра λ	Значение параметра γ	Значение параметра δ
$\gamma = 0$	0.0535	0.0369	1.395	1.437
$\gamma = 1.5$	0.0519	0.0371	1.284	1.442
$\gamma = 3$	0.0509	0.0375	1.194	1.461

Таблица 2. Параметры распределений S_V -Джонсона, представленных на рис. 7

Table 2. Parameters of Johnson- S_V distributions shown in figure 7

Чувствительность к риску	Значение параметра ξ	Значение параметра λ	Значение параметра γ	Значение параметра δ
$\gamma = 0$	0.0535	0.0369	1.395	1.437
$\gamma = 1.5$	0.0519	0.0371	1.284	1.442
$\gamma = 3$	0.0509	0.0375	1.194	1.461

6. Статистические исследования точности метода

Для проверки точности получаемых распределений было решено провести статистический тест Црнковича-Драхмана [5] для различных значений параметра чувствительности к риску. Данное статистическое тестирование заключается в сравнении наблюдаемого и предсказанного распределения доходности базового актива. Каждое наблюдаемое значение доходности рассматривается как квантиль предсказанного распределения, и если модель достаточно хороша, то уровни соответствующих квантилей будут иметь равномерное распределение и будут независимы друг от друга. Для проверки соответствия равномерному распределению используется критерий согласия Колмогорова-Смирнова. Проверка

независимости наблюдаемых уровней квантилей проводилась с помощью статистического теста BDS, названного в честь авторов Брока, Дехерта и Шайнкмана [20].

Как было сказано ранее, тестирование проводилось на данных об опционах колл на индекс NIFTY 50 за период с марта 2018 г. по март 2023 г. Рассматривались опционы сроками 1 месяц, 3 недели, 1 неделя и 1 день.

На рисунках 8 и 9 представлены примеры распределения уровней квантилей риск-нейтральных и физических распределений в сравнении с равномерным распределением.

В таблицах 3 и 4 представлены результаты теста Колмогорова-Смирнова. Значением статистики является максимальная разность между построенной

Наблюдаемое распределение квантилей для опционов колл, истекающих через 1 неделю

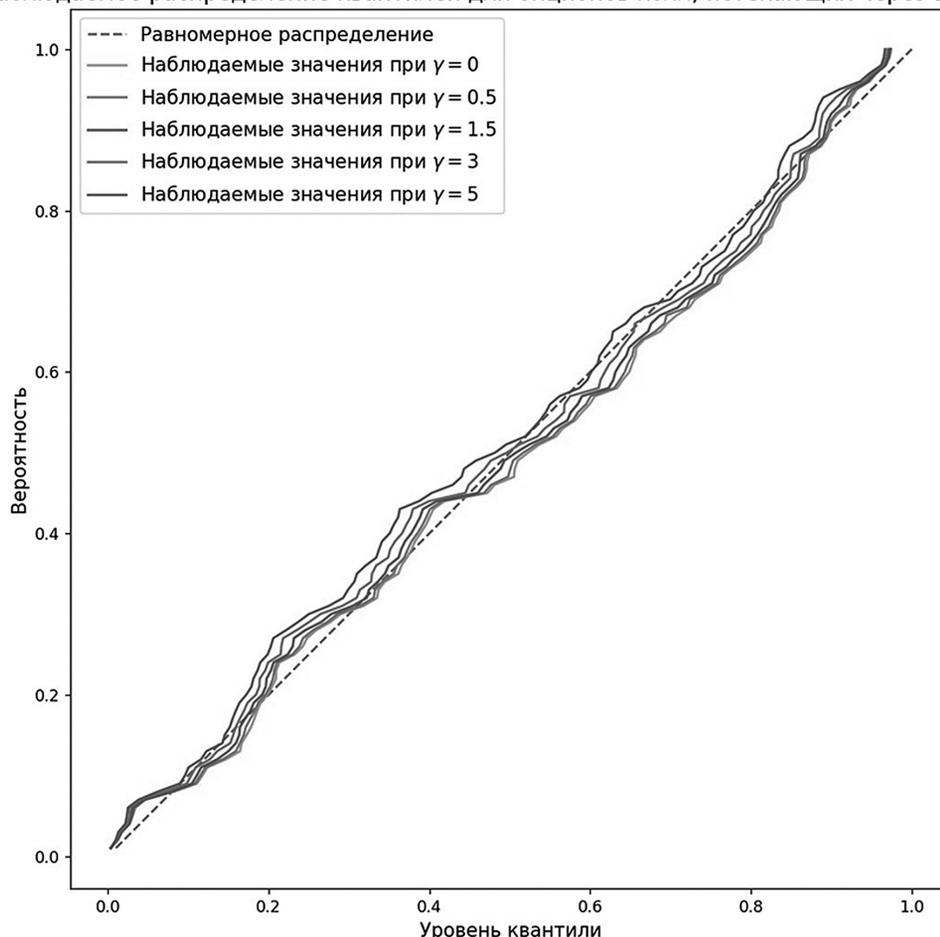


Рис. 8. Распределение уровней квантилей для опционов колл, истекающих через 1 неделю

Figure 8. Distribution of quantile levels for call options expiring in 1 week

Наблюдаемое распределение квантилей для опционов колл, истекающих через 1 месяц

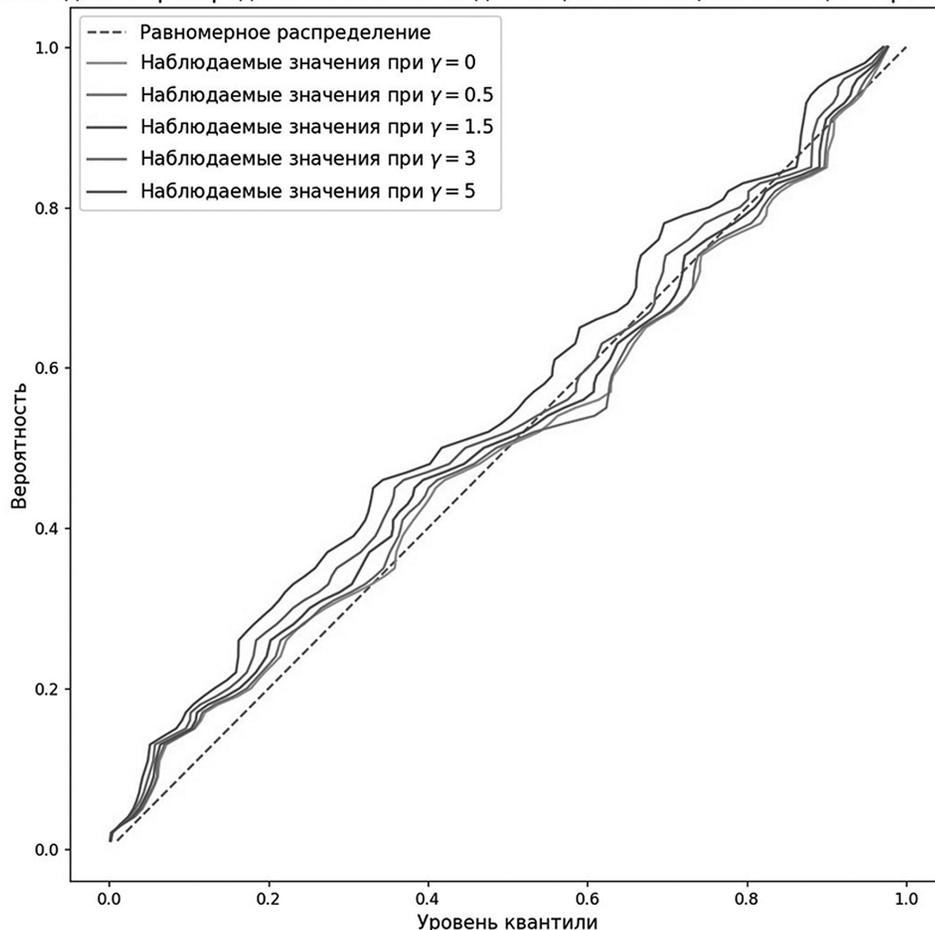


Рис. 9. Распределение уровней квантилей для опционов колл, истекающих через 1 месяц

Figure 9. Distribution of quantile levels for call options expiring in 1 month

функцией распределения квантилей и равномерным распределением при одинаковых значениях случайной величины. В таблице 5 приведены p -значения, полученные в результате проведения теста BDS.

Как видно из табл. 4 и 5, для всех рассмотренных сроков опционов значение p -value значительно превышает 5%, а значит нельзя отбросить нулевые гипотезы о том, что построенное распределение перцентилей совпадает с равномерным, и наблюдаемые уровни квантилей независимы, что подтверждает точность используемого алгоритма.

Из таблицы 3 видно, что в большинстве случаев наименьшие значения статистики тестирования достигаются при значении параметра γ , равном нулю,

что говорит о слабой чувствительности участников торгов к риску. Это может быть связано с небольшими сроками экспирации рассматриваемых опционов и особенностями базового актива.

Заклучение

В работе был представлен метод построения подразумеваемого риск-нейтрального и физического распределения будущей стоимости базового актива на основе рыночных цен опционов при возможной их зашумленности. Представленный метод является комбинацией непараметрического подхода, основанного на идее сглаживания улыбки волатильности, и предположения о том, что риск-нейтральная

Таблица 3. Результаты статистического тестирования. Тест Колмогорова-Смирнова. Значения статистики

Table 3. Statistical test results. Kolmogorov-Smirnov test. Statistics values

Срок опциона	Количество наблюдений	Значение статистики, $\gamma = 0$	Значение статистики, $\gamma = 0.5$	Значение статистики, $\gamma = 1.5$	Значение статистики, $\gamma = 3$	Значение статистики, $\gamma = 5$
1 месяц	47	0.0769	0.0907	0.0846	0.1090	0.1358
3 недели	51	0.0953	0.0959	0.1062	0.1208	0.1722
1 неделя	110	0.0597	0.0562	0.0517	0.0621	0.0758
1 день	127	0.0560	0.0580	0.0621	0.0703	0.0826

Таблица 4. Результаты статистического тестирования. Тест Колмогорова-Смирнова. p-значения

Table 4. Statistical test results. Kolmogorov-Smirnov test. p-values

Срок опциона	Количество наблюдений	p-value, $\gamma = 0$	p-value, $\gamma = 0.5$	p-value, $\gamma = 1.5$	p-value, $\gamma = 3$	p-value, $\gamma = 5$
1 месяц	47	0.923	0.800	0.860	0.592	0.321
3 недели	51	0.837	0.832	0.731	0.578	0.175
1 неделя	110	0.804	0.858	0.915	0.765	0.526
1 день	127	0.800	0.763	0.687	0.532	0.332

Таблица 5. Результаты статистического тестирования. Тест BDS. p-значения

Table 5. Statistical test results. Test BDS. p-values

Срок опциона	Количество наблюдений	p-value, $\gamma = 0$	p-value, $\gamma = 0.5$	p-value, $\gamma = 1.5$	p-value, $\gamma = 3$	p-value, $\gamma = 5$
1 месяц	47	0.409	0.317	0.386	0.324	0.731
3 недели	51	0.706	0.821	0.941	0.667	0.832
1 неделя	110	0.472	0.460	0.406	0.328	0.302
1 день	127	0.689	0.825	0.887	0.785	0.603

и физическая логарифмические доходности базового актива имеют распределение S_U -Джонсона. В работе было продемонстрировано, как от риск-нейтральной плотности вероятности будущей стоимости базового актива перейти к физической плотности вероятности в предположении степенной функции полезности агента.

Было проведено статистическое исследование эффективности представленного метода на исторических данных, проверяющее точность построенных риск-нейтральных и физических распределений будущей доходности базового актива, которое доказало применимость описанного подхода при различных условиях чувствительности агента к риску.

Список источников [References]

- Hull J. C. Options, Futures and Other Derivative Securities. 8 ed. — Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall. 2011. 864 p.
- Breeden D. T., Litzenberger R. Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices // The Journal of Business. 1978;(4):621–651
- D. Shimko. Bounds of probability // Risk. 1993;6(4):33–37
- Han Lin Extracting information from option prices in the markets. 2019. 152 p.
- Statistical backtests based on the sizes of tail losses. Measuring Market risk by Kevin Dowd — 2002 — John Wiley & Sons Ltd.
- Методика расчета теоретической цены опциона и коэффициента «дельта». Действующая редакция (от 27.10.2023) — Файловая библиотека Московской Биржи — <https://fs.moex.com/files/4720> [The method of calculating the theoretical price of the option and the delta coefficient. Current edition (from 27.10.2023) — File Library of the Moscow Exchange — <https://fs.moex.com/files/4720>. (In Russ.)]
- Jackwerth J. C., 1996. Recovering risk aversion from option prices and realized return. UC Berkeley Haas School of Business Working Paper
- Gemmil G. and Saffekos, A., 2000. How useful are implied distributions? Evidence from stock index options. The Journal of Derivatives, 7(3), P. 83–91
- Melick W. R. and Thomas C. P., 1997. recovering an asset's implied pdf from option prices: an application to crude oil during the gulf crisis. Journal of Financial and Quantitative Analysis 32, 91–115
- Bahra B., 1997. Implied risk-neutral probability density functions from option prices: Theory and application. Working Paper № 66. Bank of England, London
- Campa J. M., Chang, P. H. K. and Refalo, J. F., 2002. An options-based analysis of emerging market exchange rate expectations: Brazil's Real Plan, 1994–1999. Journal of Development Economics, 69(1). P. 227–253
- Rubinstein, M., 1994. Implied binomial trees. Journal of Finance 49, 771–818
- Buchen P., and M. Kelly. “The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices.” Journal of Financial and Quantitative Analysis. 31. № 1 (1996). P. 143–159
- Ait-Sahalia Y. and Lo, A. W., 1998. “Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices.” Journal of Finance. 53. P. 499–547
- Cooper N., 1999. Testing techniques for estimating implied RNDs from the prices of European-style options. Working Paper, Bank of England
- Bliss R. and N. Panigirtzoglou, 2004, Recovering risk aversion from options, Journal of Finance, 59
- Li, Shackleton, Taylor, Xu, 2007, Close-form Transformations from Risk-neutral to Real-world Distributions, Journal of Banking & Finance. 31. 1501–1520
- D. and J. Meyer, 2005, Relative Risk Aversion: What Do We Know?, Journal of Risk and Uncertainty 31(3).
- NIFTY 50 — <https://www.niftyindices.com/indices/equity/broad-based-indices/NIFTY-50>.
- Brock W. A., Dechert W. D., Scheinkman J. A., LeBaron B. 1996. A test for independence based on the correlation dimension. Econometric Reviews 15: 197–235.
- Ait-Sahalia Y. and A. W. Lo, 2000, Nonparametric risk management and implied risk aversion, Journal of Econometrics. 94. 9–51.

Сведения об авторах

Арбузов Петр Андреевич: аспирант кафедры исследования операций Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Количество публикаций: 3

Область научных интересов: производные финансовые инструменты, управление рисками

Контактная информация

Адрес: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

arbuzov.parb@gmail.com

Голембиовский Дмитрий Юрьевич: доктор технических наук, профессор кафедры исследования операций Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
Количество публикаций: 45
Область научных интересов: управление рисками, принятие решений в условиях неопределенности, управление финансовыми портфелями, производные финансовые инструменты

ResearcherID: H-5898-2013
ORCID: 0000-0002-1848-5988
SPIN-код: 2730-8044
Контактная информация
Адрес: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1
dgolembiovskiy@yandex.ru

Статья поступила в редакцию: 06.03.2024
Одобрена после рецензирования: 21.03.2024
Принята к публикации: 25.03.2024
Дата публикации: 26.04.2024

The article was submitted: 06.03.2024
Approved after reviewing: 21.03.2024
Accepted for publication: 25.03.2024
Date of publication: 26.04.2024